



بهینه‌سازی پالیسی‌های تعویض سنی برای سیستم‌های منسجم با استفاده از وکتور علامت سیستم

پوهنمل نورالدین فخری

دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون بدخشان، بدخشان
nooruddinfakhri95@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0001-8493-733X>

نویسنده

نشانی برقی

نشانی ارکاید

پوهنبار بهادر عتیق

دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون بدخشان، بدخشان
bahadur.atiq786@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0002-1550-8010>

* نویسنده

نشانی برقی

نشانی ارکاید

چکیده

نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه نقش کلیدی در افزایش قابلیت اعتماد و کاهش هزینه‌های عملکرد سیستم‌های میکانيکی ایفا می‌کند. یکی از استراتژی‌های مؤثر در این زمینه، پالیسی تعویض سنی است که در آن اجزای سیستم پیش از خرابی و بر اساس یک سن مشخص تعویض می‌شوند. هدف این پژوهش؛ بررسی و بهینه‌سازی پالیسی تعویض سنی در سیستم‌های منسجم با استفاده از وکتور علامت است، وکتور علامت یک سیستم منسجم نشان دهنده طول عمر سیستم منسجم با n مؤلفه مستقل، هم‌توزیع با توزیع مشترک است. وکتور علامت سیستم S نشان دهنده یک وکتور احتمال n بعدی است که i امین مؤلفه S_i برابر با احتمال از کار افتادن به محض i امین از کار افتادگی اجزای سیستم می‌باشد، سیستم‌های منسجم به‌عنوان ساختارهایی که عملکرد کلی آن‌ها به وضعیت عملکرد اجزای سازنده وابسته است، در این تحقیق از روش تحلیلی-توصیفی بهره گرفته شده که بر پایه مطالعات نظری و مروری بر مقالات و منابع معتبر علمی استوار است. همچنین برای اعتبارسنجی مدل‌ها از شبیه‌سازی و تحلیل‌های عددی استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها و تحلیل‌های عددی نشان می‌دهد که اعمال سیاست‌های بهینه تعویض سنی می‌تواند منجر به کاهش نرخ خرابی، افزایش طول عمر مفید سیستم، و کاهش هزینه‌های کل چرخه عمر گردد.

کلیدواژه‌ها: بهینه‌سازی، تعویض سنی، سیستم‌های منسجم، قابلیت اعتماد، نگهداری پیشگیرانه.

Optimization of Age Replacement Policies for Coherent Systems Using the System Signature Vector

Author | **Nooruddin Fakhri**

Email | Mathematics, Education, Badakhshan University, Badakhshan
nooruddinfakhri95@gmail.com

Orcid | <https://orcid.org/0009-0001-8493-733X>

Author | **Bahadur Atiq**

Email | Mathematics, Education, Badakhshan University, Badakhshan
bahadur.atiq786@gmail.com

Orcid | <https://orcid.org/0009-0002-1550-8010>

Abstract

Preventive maintenance plays a pivotal role in enhancing reliability and reducing the operational costs of mechanical systems. One of the effective strategies in this domain is the age replacement policy, wherein system components are replaced at a predetermined age before failure occurs. This study investigates the optimization of age replacement strategies in coherent systems using the concept of the signature vector. The signature vector of a coherent system represents the system's lifetime in terms of n independent and identically distributed components, and it defines an n -dimensional probability vector where the i -th element, S_i is, denotes the probability that the system fails precisely upon the failure of its i -th component. Coherent systems whose overall functionality is dependent on the performance of their constituent elements—serve as the analytical foundation of this research. Simulation results and numerical analyses indicate that implementing optimal age replacement policies can lead to a reduction in failure rates, an extension of the system's useful life, and a significant decrease in total life-cycle costs. Ultimately, this study offers a data-driven

Keywords: Age Replacement, Coherent Systems, Optimization, Preventive Maintenance, Reliability

مقدمه

مودل تعویض سنی بطور گسترده‌ای در نظریه قابلیت اعتماد و نگهداری مورد بررسی قرار گرفته است، مودل‌های مختلف تعویض سنی در ادبیات قابلیت اعتماد؛ تعریف و مورد مطالعه قرار گرفته اند. با توجه به روش‌های شناخته شده تعویض سنی، سیستم در زمان t و یا در زمان خرابی تعویض می‌شود، هرکدام که اولتر اتفاق بیفتد، برای چنین روشی، نرخ متوسط هزینه به عنوان یک تابع هدف، تصمیم مناسب است. سیستم را با طول عمر T در نظر بگیرید، با توجه به مودل تعویض استاندارد، سیستم در زمان t ، $0 < t \leq \infty$ و یا در زمان خرابی تعویض می‌شود، هرکدام که زودتر اتفاق بیفتد، اگر C_1 هزینه تعویض بعد از خرابی (هزینه تعویض پلان گذاری نشده) و C_2 هزینه تعویض در زمان t (هزینه تعویض پلان شده) باشد، در حالیکه $C_1 > C_2$ ، متوسط هزینه زمان تعویض از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$E(\min(T, t)) = \int_0^t P\{T > u\} du$$

T طول عمر سیستم $S_T = (0, \infty)$

$$\min(T, t) = \begin{cases} T & T < t \\ t & T \geq t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(\min(T, t)) = \underbrace{\int_0^t P\{T > u\} P\{t > u\} du}_0 < u < t + \underbrace{\int_t^\infty P\{T > u\} P\{t > u\} du}_t < u < \infty = \int_0^t P\{T > u\} du$$

اگر تابع هزینه را به $h(T)$ تعریف کنیم و متوسط تابع هزینه با گرفتن امید ریاضی از تابع هزینه حاصل خواهد شد، داریم:

$$h(T) = \begin{cases} C_1 & T \leq t \\ C_2 & T > t \end{cases} \Rightarrow E(h(T)) = \int_0^\infty h(t) f(t) dt = \int_0^t C_1 f(t) dt + \int_t^\infty C_2 f(t) dt$$

$$= C_1 \int_0^t f(t) dt + C_2 \int_t^\infty f(t) dt = C_1 P(T \leq t) + C_2 P(T > t)$$

$$C_1 (1 - F(t)) + C_2 F(t) = C_1 P\{T \leq t\} + C_2 P\{T > t\} \text{ که:}$$

صحت این واقعیت از این عبارت نتیجه می‌شود که سیستم با احتمال $1 - F(t)$ طول عمرش از T بیشتر است که درین حالت با ید هزینه C_1 پرداخت شود و با احتمال $F(t)$ سیستم قبل از T خراب می‌شود که باید هزینه C_2 پرداخته شود، و بنا براین تابع متوسط هزینه برابر خواهد بود با

$$C(t) = \frac{C_1 P\{T \leq t\} + C_2 P\{T > t\}}{E(\min(T, t))}$$

$$\Rightarrow C(t) = \frac{C_1 P\{T \leq t\} + C_2 P\{T > t\}}{\int_0^t P\{T > u\} du} \quad (1)$$

اگر $\frac{dF_T(t)}{dt} = f(t)$ و $F_T(t) = P\{T \leq t\}$ به ترتیب تابع جرم و تابع توزیع T و $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{1-F(t)}$ تابع نرخ خرابی سیستم باشند، و $h_T(t)$ را طور زیر می‌توان دریافت کرد.

$$h_T(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P\{t < t < t + \delta\}}{\delta P\{T > t\}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \delta)}{\delta} \cdot \frac{1}{P\{T > t\}} = \frac{f_T(t)}{1-F(t)}$$

اگر $h_T(t)$ تابع غیر نزولی پیوسته باشد، یا معادل آن

$$F(x|t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(x)} \quad -\infty < t < \infty \quad \forall x \geq 0$$

دارای ویژگی IFR است. ازین رو:

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t) > \frac{1}{E(T)} \left(\frac{C_1}{C_1 - C_2} \right) \quad (2)$$

برای این که تابع نرخ متوسط هزینه را مینیمم کنیم از رابطه (۱) مشتق می‌گیریم و هر مقدار که در مشتق رابطه ۱ صدق کند، تابع نرخ هزینه را مینیمم می‌کند. مشتق رابطه ۱:

$$\frac{dC(t)}{dt} = h(t) \int_0^t P\{T > u\} du - F(t) = \frac{C_2}{C_1 - C_2}$$

بعد از انجام محاسبات بدست خواهیم آورد:

$$h_T(t) \int_0^t P\{T > u\} du - P\{T \leq t\} = \frac{C_2}{C_1 - C_2}$$

این بدین معنی است که یک t^* ($0 < t^* < \infty$) منحصر بفرد وجود دارد، که $C(t)$ را مینیمم می‌کند، و در رابطه زیر صادق است.

$$h_T(t) \int_0^{t^*} P\{T > u\} du - P\{T \leq t^*\} = \frac{C_2}{C_1 - C_2} \quad (3)$$

تبیین مسأله

یک سیستم یا قطعه پس از رسیدن به یک سن مشخص T تعویض می‌شود حتی اگر هنوز خراب نشده باشد. اگر پیش از رسیدن به سن T خراب شود، آن‌گاه بلافاصله تعویض می‌شود. هدف این پالیسی، کاهش هزینه‌های نگهداری و افزایش قابلیت اعتماد سیستم است.

پرسش‌های تحقیق

پرسش اصلی: چگونه می‌توان پالیسی بهینه‌ی تعویض سنی برای اجزای سیستم‌های منسجم را به گونه‌ای طراحی کرد که هزینه‌های کل نگهداری و جایگزینی به حداقل برسد؟ پرسش‌های فرعی:

۱. در شرایط مختلف نرخ خرابی (مثلاً خرابی ثابت یا وابسته به زمان)، جایگزینی تعویض سنی چگونه تغییر می‌کند؟

۲. آیا در سیستم‌هایی با ساختار سلسله‌ای یا موازی، پالیسی بهینه‌ی تعویض سنی یکسان باقی می‌ماند؟

۳. در صورت وجود هزینه‌های متفاوت برای تعویض پیشگیرانه و تعویض پس از خرابی، چگونه می‌توان سن بهینه‌ی جایگزینی را تعیین کرد؟

اهمیت تحقیق

اهمیت این پژوهش در آن است که با ارائه یک چارچوب تحلیلی برای بهینه‌سازی پالیسی‌های تعویض سنی در سیستم‌های منسجم، نقش مؤثری در افزایش قابلیت اعتماد و کاهش هزینه‌های عملکرد سیستم‌های مکانیکی ایفا می‌کند. سیستم‌های منسجم، که عملکرد کلی آن‌ها وابسته به وضعیت اجزای سازنده است، در بسیاری از صنایع حیاتی مورد استفاده قرار می‌گیرند و خرابی هر مؤلفه می‌تواند پیامدهای اقتصادی و عملیاتی قابل توجهی داشته باشد. استفاده از وکتور علامت به عنوان ابزار تحلیل، امکان مدل‌سازی دقیق و پیش‌بینی طول عمر سیستم را فراهم می‌کند و راهکاری علمی برای تعیین سن بهینه تعویض اجزای سیستم ارائه می‌دهد. بنابراین، این تحقیق نه تنها درک بهتری از پالیسی‌های نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه فراهم می‌آورد، بلکه با کاهش نرخ خرابی و هزینه‌های چرخه عمر، می‌تواند بهبود کارایی و پایداری عملیاتی سیستم‌های صنعتی و مهندسی را تضمین کند.

اهداف تحقیق

هدف اصلی: این تحقیق با بهره‌گیری از مدل‌سازی ریاضی و تحلیل‌های عددی، در پی آن است که با شناسایی راهبردهای نگهداری مبتنی بر داده، نرخ خرابی سیستم را کاهش داده، طول عمر عملیاتی آن را افزایش دهد و هزینه‌های کلی نگهداری را به حداقل برساند.

اهداف فرعی:

۱. شناسایی و تحلیل عوامل مؤثر بر تعیین سن بهینه‌ای جایگزینی در سیستم‌های منسجم و ارائه‌ی مودلی جهت تعیین پالیسی بهینه تعویض سنی که منجر به کاهش هزینه‌های نگهداری و افزایش قابلیت اعتماد سیستم شود.

۲. مقایسه عملکرد پالیسی تعویض سنی در شرایط مختلف (مانند نرخ خرابی‌های مختلف یا ساختارهای متفاوت سیستم).

۳. کاهش هزینه‌های عملیاتی و نگهداری: با بهینه‌سازی زمان تعویض، می‌توان از خرابی‌های ناگهانی جلوگیری کرد و هزینه‌های مربوط به تعمیرات اضطراری را کاهش داد.

پیشینه‌ی تحقیق

درین موارد مطالعات زیاد انجام شده است؛ مدل‌های تعویض سنی برای سیستم‌های چندین مؤلفه‌ای. (نیکاگاو، ۲۰۰۷). درمورد بهینه‌ی زمان تعویض سیستم‌های موازی و سیستم k از n با مینیم کردن نرخ متوسط هزینه وقتی که نرخ خرابی مؤلفه ثابت است. (فلاین و همکاران، ۱۹۹۷، ص ۲۷۳) در باره مدل برنامه نویسی پویا در حالت گسسته برای تعویض از مؤلفه‌ها در سیستم منسجم، یک مدل تعویض سنی برای یک سیستم k از n (اریلماز، ۲۰۲۰)، (شی-هوئی شو، ۲۰۰۱)، مسائل بهینه‌سازی در سیستم‌های موازی با اجزای وابسته و متنوع، تعداد بهینه اجزا و زمان بهینه تعویض برای سیستم‌هایی که اجزای آن‌ها دارای وابستگی‌های آماری هستند، و همچنان بهینه‌ی زمان تعویض را برای یک سیستم موازی مورد مطالعه قرار داده اند که شامل مؤلفه وابسته است. (اریلماز و اوزکوت، ۲۰۲۰). درین جا، روش‌های تعویض سنی فوق‌الذکر را برای کلاس از سیستم‌های منسجم در نظر می‌گیریم. کلاس تشکیل شده از تمام سیستم‌های منسجم دارای ویژگی IFR با نرخ خطر غیر نزولی است. یک سیستم دارای ویژگی IFR است وقتی که طول عمر مؤلفه‌ها مستقل و دارای توزیع یکسان، و از توزیع با ویژگی IFR پیروی می‌کنند، بخصوص در بخش دوم شرایط لازم را برای قیمت بهینه‌های منحصر بفرد بوجود می‌آوریم که متوسط نرخ هزینه را برای کلاس از سیستم‌های منسجم مینیم می‌کند. و در بخش سوم نتایج برای سیستم‌های نوع متوالی خطی و دایروی بررسی می‌شود.

روش تحقیق

به صورت توصیفی-تحلیلی انجام شده و شامل مطالعه عمیق منابع علمی معتبر، توسعه مدل‌های ریاضی مرتبط و اجرای شبیه‌سازی‌های عددی برای ارزیابی عملکرد سیاست‌های مختلف نگهداری است.

نتایج و یافته‌ها

تحلیل‌های کمی و شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که اتخاذ سیاست تعویض سنی بهینه، می‌تواند به طور معناداری نرخ خرابی را کاهش داده، طول عمر مؤثر سیستم را افزایش دهد و هزینه‌های کل چرخه عمر را کاهش بخشد. همچنین، چارچوب پیشنهادی در این پژوهش با تکیه بر داده‌های عملکردی، امکان به کارگیری در سیستم‌های نگهداری هوشمند آینده را فراهم می‌کند و می‌تواند به عنوان بستری برای توسعه تصمیم‌گیری‌های مبتنی بر داده در مدیریت دارایی‌های فنی مورد استفاده قرار گیرد.

تعویض سنی برای سیستم‌های منسجم: سیستم منسجم را که متشکل از n مؤلفه مستقل و هم توزیع (iid) که طول عمر آنها به $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ نشان داده شده در نظر بگیرید، اگر

$T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ نشان دهنده طول عمر سیستم باشد، فرض کنید که تابع توزیع مشترک زمان خرابی مؤلفه‌ها با توزیع تجمعی پیوسته آن به، $G(t) = P\{X_i \leq t\}, i = 1, 2, \dots, n$ و وکتور علامت سیستم بصورت $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ نشان داده شده است. نخست وکتور علامت را تعریف نموده با استفاده از آن تعویض سنی را برای سیستم‌های منسجم مورد مطالعه قرار میدهیم.

وکتور علامت سیستم منسجم: اگر $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ نشان دهنده طول عمر یک

سیستم منسجم با n مؤلفه مستقل هم‌توزیع با توزیع مشترک $G(t) = P\{X_i \leq t\}, i = 1, 2, \dots, n$ آنگاه وکتور علامت سیستم که با S نشان داده شده است یک وکتور احتمال n بعدی است که اِمین مؤلفه S_i برابر با احتمال از کار افتادن به محض اِمین از کار افتادگی اجزای سیستم میباشد، یا بطور خلاصه‌تر $S_i = P\{T = X_{i:n}\}$ که T طول عمر سیستم و $X_{i:n}$ اِمین آماره مرتب می‌باشد و مجموع S_i برابر به یک است، طول عمر سیستم k از n برابر با $X_{i:n}$ اِمین آماره مرتب و وکتور علامت این سیستم برابر به $s_{i:n} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ اگر S وکتور علامت یک سیستم n مؤلفه‌ای باشد میتوان

S را بصورت ترکیب از علامت سیستم‌های k از n طور $s = \sum s_k \cdot s_{k:n}$ نوشت.

بطور مثال: سیستم که تابع ساختار آن به شکل $\phi(x_1, x_2, x_3) = \min(x_1, \max(x_2, x_3))$ مؤلفه‌های x_1, x_2, x_3 به $3! = 6$ ترتیب مختلف، با فرض iid بودن مؤلفه‌ها بدست می‌آید. ازین رو سیستم فوق دارای وکتور علامت $s = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ است، به‌راحتی میتوان پنج سیستم منسجم مجزا از ترتیب سه وکتور علامت $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0), (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ سه علامت اول مربوط به سیستم i از 3 و پنجم مربوط به سیستم است که در آن یک جز به موازات یک سیستم سلسله‌ی در دو جزء دیگر است.

وهمچنان اصطلاح شناخته شده تابع بقا که با ترکیب از وکتور علامت سیستم به وسیله سامانیگو مطرح شده است. (سامانیگو، ۲۰۲۲)

$$P\{T > t\} = \sum_{i=1}^n P\{T > t, T = X_{i:n}\} = \sum_{i=1}^n s_i \left(\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t) (\bar{F}(t))^{n-j} \right)$$

با ترتیب تغییر سیگما داریم؛

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n s_i \binom{n}{j} F^j(t) (\bar{F}(t))^{n-j} \right) \Rightarrow P\{T > t\} = \sum_{i=1}^n s_i P\{X_{i:n} > t\} \quad (4)$$

درین جا $X_{i:n}$ نشان دهنده کوچکترین آماره مرتب از جمله $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ،

$$s_i = P\{T = X_{i:n}\} \text{ و } P\{X_{i:n} > t\} = \sum_{j=n-i+1}^n \binom{n}{j} G^j(t) (\bar{G}(t))^{n-j} \text{ با به کار بردن رابطه ۴}$$

قیمت متوسط زمان خرابی سیستم توسط فورمول زیر محاسبه می‌شود.

$$E(T) = \sum_{i=1}^n P(T > t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_i P\{X_{i:n} > t\} = \sum_{i=1}^n s_i E(X_{i:n})$$

$$E(T) = \sum_{i=1}^n s_i E(X_{i:n}) \quad (6)$$

نتیجه زیر در رفتار حدی از نرخ خرابی $h_T(t)$ سیستم در بدست آوردن شرط لازم برای منحصر بفرد بودن t^* که در فرمول (۳) صدق می‌کند، مفید خواهد بود.

گزاره ۱: اگر Z_φ حد اکثر تعداد مؤلفه‌های خراب، بگونه‌ایکه سیستم با طول عمر $T = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ هنوز هم می‌تواند کار کند و $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ مستقل و هم توزیع با

تابع نرخ خرابی مشترک $r(t) = \frac{g(t)}{1-G(t)}$ است، که درین صورت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (n - z_\varphi) r(t) = (n - z_\varphi) \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = (n - z_\varphi) \lambda$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t) = (n - z_\varphi) \lambda \quad (7)$$

شرایط لازم و کافی را برای سیستم‌های با طول عمر $T = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ و تابع نرخ خرابی غیرنزولی و فیکه مؤلفه‌ها مستقل و هم توزیع با طول عمر مشترک $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ هستند و از توزیع با ویژگی IFR پیروی می‌کنند در گزاره زیر بدست آورده است. (سامانیگو، ۲۰۲۲).

گزاره ۲: اگر طول عمر مؤلفه‌ها $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ با نرخ خرابی $r(t)$ مستقل و هم توزیع باشند، و تابع گویای آن

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \binom{n}{i} x^i / \sum_{i=0}^{n+1} \left(\sum_{j=i+1}^n s_j \right) \binom{n}{i} x^i \quad (8)$$

باشد، غیرنزولی است برای $x \in (0, \infty)$ که در نتیجه سیستم دارای ویژگی IFR است.

اگر $G(t) = \frac{F(t)}{\bar{F}(t)}$ (شانس شکست در مقابل بقا) تعویض کنیم حاصل خواهد شد

$$h_T(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \binom{n}{i} G^i(t) / \sum_{i=0}^{n+1} \left(\sum_{j=i+1}^n s_j \right) \binom{n}{i} G^i(t) (r(t))$$

است. $G(t)$ تابع غیر نزولی است، اگر طول عمر سیستم مستقل و هم توزیع از توزیع F با ویژگی

IFR باشد، سیستم نیز با ویژگی IFR است و تابع گویای آن $u(x)$ یک تابع غیر نزولی از $x \in (0, \infty)$ است اگر $u'(x) > 0$.

با تلفیق گزاره های ۱ و ۲ در زیر شرایط لازم را برای موجودیت بهینه منحصر بفرد t^* بدست می آوریم که در معادله ۳ صدق می کند.

گزاره ۳: برای سیستم منسجم با طول عمر $T = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ اگر توزیع مشترک مؤلفه ها دارای ویژگی IFR باشد، اگر دو شرط زیر درست باشد، پس یک $t^* (0 < t^* < \infty)$ منحصر بفرد وجود دارد که تابع $C(t)$ را مینیمم خواهد کرد.

i. تابع $u(x)$ که توسط رابطه (۸) تعریف شده غیر نزولی باشد.

$$(9) \quad \lambda \sum_{i=1}^n s_i E(X_{i:n}) > \frac{C_1}{C_1 - C_2} \quad \text{باشد.} \quad \text{ii.}$$

از آنجایی که $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lambda$ است.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t) > \frac{1}{\sum_{i=1}^n s_i E(X_{i:n})} \left(\frac{C_1}{C_1 - C_2} \right)$$

و در نتیجه بدست خواهد آمد؛ بناءً یک t^* منحصر بفرد محدود وجود دارد که تابع $C(t)$ را مینیمم می کند.

نتیجه زیر شرایط متناظر را برای مدل از سیستم های شناخته شده ارائه میدهد؛ سیستم را در نظر بگیرید که دارای ساختار k از n است. بطور که $1 < k < n$ ، $s_{n-k+1} = P\{T = X_{n-k+1:n}\} = 1$ و توزیع مؤلفه ها دارای ویژگی IFR است، اگر؛

$$k\lambda E(X_{n-k+1:n}) > \frac{C_1}{C_1 - C_2} \quad (10)$$

بناءً یک $t^* (0 < t^* < \infty)$ محدود و منحصر به فرد وجود دارد که تابع $C(t)$ را مینیمم می کند. برای سیستم های k از n (n مؤلفه ای که طول عمر آنها (iid) هستند، با توجه به این که توزیع $G(IFR)$ است، توزیع طول عمر سیستم نیز IFR است. و از طرف دیگر برای سیستم k از n ، $S = (0, \dots, 0, 1_{n-k+1}, 0, \dots, 0)$ و $z_\varphi = n - k$ و بنابراین نتیجه از گزاره ۳ پیروی می کند.

چونکه فعال بودن سیستم بستگی به فعال بودن k مؤلفه دارد و $(n - z_\varphi) = k$ تعداد مؤلفه های فعال، و آماره ترتیبی $X_{n-k+1:n}$ است و از رابطه ۳ داریم که $k\lambda E(X_{n-k+1:n}) > \left(\frac{C_1}{C_1 - C_2} \right)$ است و نتیجه می گیریم که توزیع مؤلفه ها دارای ویژگی IFR و از گزاره ۲ نتیجه می شود که طول عمر سیستم نیز IFR است.

اگر بطور خاص $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ، $t \geq 0$ پس سیستم k از n IFR است برای $1 \leq k \leq n$ که به ترتیب دارای تابع جرم، تابع توزیع و تابع نرخ خرابی زیر باشند.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \bar{F}(t) = e^{-\lambda t}, \quad r(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

برای دریافت امید ریاضی λ امین آماه مرتب از رابطه زیر استفاده می‌کنیم،

$$E(X_{in}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

اگر $C_1 = nC_a + C_f$ و $C_2 = nC_a$ که C_a و C_f به ترتیب نشان دهنده هزینه یک مؤلفه و هزینه اضافی که در صورت خرابی تعویض می‌شود.

از آنجاییکه از رابطه (۱۰) یک $t^* (0 < t^* < \infty)$ منحصر بفرد محدود وجود دارد که تابع $C(t)$ را مینیمم می‌کند وقتی که؛

$$(n - z_\varphi) \lambda \sum_{i=1}^n s_i E(X_{in}) > \frac{C_1}{C_1 - C_2} \Rightarrow \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i} - \frac{nC_a}{kC_f} > 0$$

نامساوی بالا از رابطه ۹ نتیجه می‌شود که داشتیم $k\lambda \sum_{i=1}^n s_i E(X_{in}) > \frac{C_1}{C_1 - C_2}$ ، با شرایط داده

شده بوسیله (ناکاگوا، ۲۰۰۷) مطابقت دارد. در ادامه برای وضاحت بیشتر، سیستم را با چهار مؤلفه در نظر می‌گیریم.

سیستم را با تابع ساختار $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min(x_1, \max(x_2, x_3, x_4))$ در نظر می‌گیریم
اولاً وکتور علامت سیستم به این شکل دریافت می‌شود $s_i = \frac{\# \{T = X_{in}\}}{n!}$ ، جدول ترتیب‌های
آماره‌های ترتیبی نشان می‌دهد که طول عمر سیستم با احتمال $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ برابر با $X_{1:4}$ ، با احتمال
 $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ برابر با $X_{2:4}$ و با احتمال $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ برابر با $X_{2:4}$ است، و از این رو وکتور علامت
 $S = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ و تابع گویای سیستم به شکل زیر است.

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) s_{i+1} \binom{n}{i} x^i / \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n s_j \right) \binom{n}{i} x^i$$

با قیمت‌گذاری حاصل خواهد شد.

$$u(x) = \frac{\sum_{i=0}^3 (4-i) s_{i+1} \binom{4}{i} x^i}{\sum_{i=0}^3 \left(\sum_{j=i+1}^4 s_j \right) \binom{4}{i} x^i} \Rightarrow u(x) = \frac{1+3x+6x^2}{1+3x+3x^2}$$

بخاطر اینکه تابع $u(x)$ غیر نزولی در $x \in (0, \infty)$ است، سیستم دارای ویژگی IFR است اگر $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ iid باشند، براساس گزاره (۳) از ویژگی توزیع IFR پیروی می کنند، و بناءً یک $t^* (0 < t^* < \infty)$ منحصر بفرد وجود دارد که تابع $C(t)$ را مینیمم می کند، اگر:

$$2\lambda \left[\frac{1}{4} E(X_{1:4}) + \frac{1}{4} E(X_{2:4}) + \frac{1}{2} E(X_{3:4}) \right] > \frac{C_1}{C_1 - C_2}$$

نامساوی بالا از رابطه ۱۰ بدست آمده است.

سیستم های k از n دایروی متوالی: سیستم متشکل از n مؤلفه که به شکل دایروی ترتیب

شده اند سیستم خراب می شود اگر حداقل k مؤلفه متوالی خراب شود. توزیع خرابی سیستم با استفاده از مسیرهای رخداد خرابی سیستم بدست می آید، رخدادها به عنوان یک حالت متشکل از تعداد باینری با اندازه n نمایش داده می شود، باینری 1 نشان دهنده فعال بودن مؤلفه و باینری 0 نشان دهنده خرابی مؤلفه است.

سیستم های متوالی خطی k از n : سیستم متشکل از n مؤلفه را در نظر سیستم کار می کند

اگر و فقط اگر k مؤلفه متوالی کار کند، سیستم خراب می شود اگر حداقل k مؤلفه متوالی خراب شود، یک ترتیب خاص از مؤلفه ها در یک سیستم به عنوان یک طراحی یاد می شود، مثال های از یک سیستم k از n خطی متوالی یک سیستم خط لوله نفت با n ایستگاه پمپاژ که حداقل ۲ ایستگاه پمپاژ متوالی از کار بیفتند، یک سیستم مخابراتی با n ایستگاه بازپخش کننده، بطور عموم $(Lin/Con/k/n:F)$ و $(Cir/Con/k/n:F)$ ، سیستم است که متشکل از n مؤلفه خطی (دایروی) طور متصل هستند که سیستم خراب می شود اگر حداقل k مؤلفه متوالی خراب وجود داشته باشد. اگر $S^L = (S_1^L, S_2^L, \dots, S_n^L)$ و $S^C = (S_1^C, S_2^C, \dots, S_n^C)$ به ترتیب نشان دهنده وکتور علامت $(Lin/Con/k/n:F)$ و $(Cir/Con/k/n:F)$ سیستم F باشند، در این صورت:

$$s_i^a = \frac{N_a(i-1, k, n)}{\binom{n}{n-i+1}} - \frac{N_a(i, k, n)}{\binom{n}{n-i}}, \quad a = L, C \Rightarrow a_i = \frac{r_i(n)}{\binom{n}{j}} \quad (I)$$

اگر $N_*(j, k, n)$ نشان دهنده تعداد راه های مرتب کردن تمام n مؤلفه با z و $z-n$ که در یک خط

کار می کنند وقتی که $(a = L)$ یا $(a = C)$ روی دایره قرار گیرد.

$$s_i = a_{i-1}(n) - a_{n-i}(n) \quad (\text{II})$$

$$a_{n-i+1} = \frac{r_{n-i+1}(n)}{\binom{n}{n-i+1}}, \quad a_{n-i} = \frac{r_{n-i}(n)}{\binom{n}{n-i}}, \quad r_{n-i+1}(n) = N_a(n - (n-i+1), k, n)$$

$$r_{n-i}(n) = N_a(n - (n-i), k, n), \quad s_i = \frac{N_a(i-1, k, n)}{\binom{n}{n-i+1}} - \frac{N_a(i, k, n)}{\binom{n}{n-i}}$$

همزمان تعداد راه‌های مرتب n مؤلفه با j مؤلفه خراب و $n-j$ مؤلفه فعال در یک خط وقتی که $a=L$ و روی یک دایره وقتی که $a=C$ ، طوریکه هیچ k مؤلفه خراب یا بیشتر متوالی نباشند.

$$N_L(j, k, n) = \sum_{i=0}^{\min(\lfloor \frac{j}{k} \rfloor, n-j+1)} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j}, \quad 0 \leq j \leq n$$

$$N_C(j, k, n) = \frac{n}{n-j} N_L(j, k, n), \quad 0 \leq j \leq n$$

و $N_C(n, k, n) = 0$ نشان دهند ای قسمت تام X است.

اگر $Z_\varphi^L(Z_\varphi^C)$ حد اکثر تعداد مؤلفه‌های خراب باشد بطوریکه یک سیستم (Lin/Con/k/n:F) و (Cir/Con/k/n:F) باشد و سیستم هنوز می‌تواند کار کند. بناءً

$$z_\varphi = \begin{cases} n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor & \text{if } a = L \\ n - \left\lfloor \frac{n+k-1}{k} \right\rfloor & \text{if } a = C \end{cases}$$

اگر طول عمر توزیع مشترک مؤلفه‌ها $G(t) = 1 - \lambda t e^{-\lambda t}$ ، $t \geq 0$ باشد، پس $G(t)$ دارای

$$\text{ویژگی IFR و } r(t) = \frac{\lambda^2 t}{(1 + \lambda t)} \text{ بطوریکه } t \rightarrow \infty.$$

برای سیستم‌های $F \text{ Lin/Con/k/n:F}$ ویژگی IFR بودن را حفظ می‌کند. پس یک $t^* (0 < t^* < \infty)$ منحصر بفرد وجود دارد که $C(t)$ را مینیمم می‌کند، اگر؛

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \lambda \sum_{i=1}^n s_i^L E(X_{i:n}) > \frac{C_1}{C_1 - C_2} \quad (11)$$

بطور مشابه سیستم‌های F متوالی دایروی k از n ویژگی IFR بودن را حفظ می‌کند. پس: $t^* (0 < t^* < \infty)$ منحصر بفرد وجود دارد که $C(t)$ را مینیمم می‌کند، اگر؛

$$\left\lfloor \frac{n-k+1}{k} \right\rfloor \lambda \sum_{i=1}^n s_i^C E(X_{i:n}) > \frac{C_1}{C_1 - C_2} \quad (12)$$

سیستم‌های (Lin/Con/۲/۶:F) و (Lin/Con/۳/۶:F) و (Cir/Con/۲/۵:F) و (Cir/Con/۳/۵:F) ویژگی IFR بودن را حفظ می‌کند، طوری داده شده در گزاره ۲ برای این سیستم‌ها صادق است. در شکل ۲ امید ریاضی نرخ هزینه برای سیستم‌های (Lin/Con/۲/۶:F) و (Lin/Con/۳/۶:F) وقتی که $\lambda = 1$ ، $C_1 = nC_a + C_f$ و $C_2 = nC_a$ با $C_a = 0.25$ و $C_f = 4$ شرط داده شده توسط (۱۱) برای هردو سیستم صدق کند. بهینه زمان تعویض برای سیستم دارای توزیع F (Lin/Con/۲/۶:F) کوچکتر است از بهینه زمان تعویض از (Lin/Con/۳/۶:F)، این نتایج بدست آمده به حدس زیر کمک می‌کند، برای n ثابت، و افزایش k منجر به افزایش در بهینه زمان تعویض می‌شود، متوسط نرخ هزینه در سیستم (Cir/Con/۲/۵:F) وقتی که $\lambda = 1$ ، $C_1 = nC_a + C_f$ و $C_2 = nC_a$ با $C_a = 0.25$ و $C_f = 4$ ، برای سیستم‌های دایروی بطور مشابه نیز می‌توان نشان داد.

جدول زمان تعویض بهینه برای سیستم‌های انتخابی

system	t^*	$C(t^*)$
Lin/con/2/4:F	0.893	1.755
Lin/con/2/6:F	0.868	2.726
Lin/con/2/6:F	1.271	1.667
Lin/con/2/8:F	0.858	3.705
Lin/con/2/9:F	1.228	2.597
Cir/con/2/4:F	0.822	1.904
Cir/con/2/5:F	0.817	2.392
Cir /con/2/5:F	1.146	1.519
Cir /con/2/7:F	0.821	3.364
Cir /con/2/8:F	1.152	2.438

در این جدول زمان تعویض بهینه را برای سیستم‌های k از n خطی متوالی ودایروی محاسبه می‌کنیم و قتی که $\lambda = 1$ ، $C_1 = nC_a + C_f$ و $C_2 = nC_a$ با $C_a = 0.25$ و $C_f = 4$ ، لازم به ذکر است که سیستم‌های فوق‌الذکر در جدول تماماً ویژگی IFR بودن را حفظ می‌کند.

نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت افزایش قابلیت اعتماد و کاهش هزینه‌های تعمیر و نگهداری در سیستم‌های منسجم، استفاده از سیاست‌های بهینه تعویض سنی به عنوان یک راهکار کارآمد مورد توجه قرار گرفته است. در این تحقیق، روش‌های مختلف بهینه‌سازی تعویض سنی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج نشان داد که تعیین سن بهینه برای تعویض اجزا می‌تواند به طور قابل توجهی در بهبود عملکرد سیستم و کاهش هزینه‌های عملیاتی نقش داشته باشد. استفاده از مدل‌های آماری و تکنیک‌های بهینه‌سازی مانند برنامه‌ریزی پویا، ابزارهای مؤثری برای تصمیم‌گیری دقیق‌تر در خصوص زمان

تعویض اجزا فراهم می‌سازد. در نهایت، اتخاذ پالیسی‌های مناسب تعویض سنی منجر به افزایش طول عمر مفید سیستم و کاهش احتمال خرابی‌های غیرمنتظره خواهد شد. نتایج مقاله حاضر را میتوان برای یک سیستم منسجم با یک وکتور علامت استفاده کرد، مثال‌های توضیح را برای محاسبه نمودار میانگین نرخ هزینه برای سیستم‌های k از n خطی و دایروی متوالی که وکتور علامت آنها شناخته شده است ارائه گردید.

منابع

- Barlow, R. E., & Proschan, F. (1965). *Mathematical theory of reliability*. Wiley.
- Elsayed, E. A. (2012). *Reliability engineering* (2nd ed.). Wiley.
- Eryilmaz, S. (2020). Age-based preventive maintenance for coherent systems with applications to consecutive k-out-of-n systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 199, 106926. <https://doi.org/10.1016/j.res.2020.106926>
- Eryilmaz, S. (2023). Age based preventive replacement policy for discrete time coherent systems with independent and identical components. *Reliability Engineering & System Safety*, 240, 109544. <https://doi.org/10.1016/j.res.2023.109544>
- Eryilmaz, S., & Bulanik, İ. (2024). Age replacement policies for discrete and continuous heterogeneous k-out-of-n systems. *Annals of Operations Research*. <https://doi.org/10.1007/s10479-024-06371-0>
- Eryilmaz, S., & Pekalp, M. H. (2024). Optimal age replacement time for coherent systems under geometric point process shocks. *Computers & Industrial Engineering*, 189, 109168. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.109168>
- Eryilmaz, S., & Tank, F. (2023). Optimal age replacement policy for discrete time parallel systems. *TOP*, 31(3), 475–490. <https://doi.org/10.1007/s11750-022-00648-y>
- Nakagawa, T. (2007). *Maintenance theory of reliability*. Springer Science & Business Media.
- Niu, J., & Yan, R. (2024). Preventive replacement policies of parallel/series systems with dependent components under deviation costs. *arXiv preprint arXiv:2407.17986*. <https://arxiv.org/abs/2407.17986>
- Safaei, N., & Ahmadi, A. (2022). Optimal age replacement policy for k-out-of-n systems under random shocks. *Reliability Engineering & System Safety*, 218, 108186. <https://doi.org/10.1016/j.res.2021.108186>
- Wang, H., & Pham, H. (2006). *Reliability and optimal maintenance*. Springer Science & Business Media.
- Zhang, Y., & Wang, Y. (2009). Age replacement policy for a cold standby system with priority mechanism. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12), 4372–4382. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.12.012>